

Dr. Michael Paetz - Raum 2129 - Tel.: 42838 - 5561
michael.paetz@uni-hamburg.de

MATHEMATIK VORKURS

(WiSe 2023/24)

- SELBSTTEST -

Dieser Selbsttest dient dazu, dass Sie ihre mathematischen Kenntnisse einschätzen können. Die Lösungen zu den Aufgaben sind am Ende dieses Tests eingefügt.

Sollten Sie Probleme haben, die Aufgaben eigenständig zu lösen, wird Ihnen dringend empfohlen am Vorkurs Mathematik teilzunehmen!

AUFGABEN

1. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

a) $\frac{144x^3y^9}{12x^2 \cdot 12y^7}$

b) Für $a \neq -\frac{7}{5}b$: $\frac{25a^2 - 49b^2}{5a + 7b}$

2. Die in einem landwirtschaftlichen Betrieb pro Hektar eingebrachte Menge einer Getreidesorte sei vom Jahr 2000 auf das Jahr 2001 um 25% gestiegen. Bei welchem prozentualen Rückgang der Erträge von 2001 auf 2002 sind die Erträge im Jahr 2000 und 2002 gleich?

3. Ein Kapital von 20.000 Euro wachse bei konstantem Zinssatz bei jährlicher Zinsgutschrift in 10 Jahren auf 30.000 Euro an. Geben Sie den Zinssatz in Prozent an.

4. Sie lesen in der Zeitung am

- Dienstag: Der DAX ist gegenüber dem Vortag um 2,34% gestiegen.
- Mittwoch: Der DAX ist gegenüber dem Vortag um 1,63% gefallen.
- Donnerstag: Der DAX ist gegenüber dem Vortag um 2,47% gefallen.
- Freitag: Der DAX ist gegenüber dem Vortag um 4,80% gestiegen.

Um wie viel Prozent ist der DAX im gesamten Zeitraum gestiegen oder gefallen?

5. Ein mobiles Telefon kostet 30 Euro Grundgebühr im Monat und zusätzlich 0,16 Euro pro Minute. Wie viele Stunden kann mindestens bzw. höchstens telefoniert werden, wenn die monatliche Telefonrechnung zwischen 102 Euro und 126 Euro liegen soll?

6. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich:

a) $(-1 + x - x^2)(1 + x)$

b) $\left[\left(\frac{x}{3} \right)^4 \cdot \frac{9^2}{x^{-2}} \right]^{-2}$

c) $2^{10} 32^{-9/5}$

d) $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$

7. Herr K. hat 10.000 Euro zu einem jährlichen Zinssatz von 6% angelegt. Wie viel Geld muss er zusätzlich bei einem Zinssatz von 5% anlegen, um insgesamt 1.000 Euro als jährliche Zinszahlungen zu erhalten?

8. Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach den angegebenen Variablen auf:

a) $\sqrt{KLM} - \alpha L = B, K = ?$

b) $AK^{1/5}L^{3/5} = Y_0, L = ?$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y}, x = ?$

d) $Y = (500 + 0,8Y) + 100, Y = ?$

9. Zerlegen Sie die linke Seite der Gleichung

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

in Faktoren.

10. Geben Sie die Lösungen x_1 und x_2 der folgenden Gleichung an:

$$60 - 4x^2 - 8x = 0$$

11. Geben Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen an (sofern sie lösbar sind).

a) $\frac{4 - x^2}{\sqrt{4 + x^2}} = 0$

b) $\frac{y(2y^2 - 8y + 6)}{(y^4 + 3)^{5/2}} = 0$

c) $\frac{z^2 - z}{\sqrt{z^2 - 1}} = 0$

12. Bestimmen Sie a , b und c , so dass die folgende Gleichung für alle x erfüllt ist:

$$5x^2 - 10x + c = a(x + b)^2 - 7$$

13. Betrachten Sie die folgenden zwei linearen Gleichungen in den Variablen x und y .

$$\begin{aligned}ax + by &= c \\ dx + ey &= f\end{aligned}$$

Die Konstanten a, b, c, d, e und f sind als Parameter aufzufassen.

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR.

- a) Das obige Gleichungssystem hat entweder keine, eine oder unendlich viele Lösungen.
- b) Das obige Gleichungssystem ist nur dann eindeutig lösbar, wenn $c \neq f$ ist.
- c) Das obige Gleichungssystem ist mit den Parametern $a = b = d = 1$ und $e = 2$ eindeutig lösbar.
- d) Wenn zusätzlich zu den Voraussetzungen in c) noch $c = 2$ und $f = 3$ gilt, so ist $x = y = 1$ eine Lösung des obigen Gleichungssystems.
- e) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar, wenn $ae - bd = 0$ ist.

14. DREI der folgenden Aussagen sind WAHR.

- a) Um die Implikation $A \Rightarrow B$ zu beweisen, kann man auch die Implikation „Nicht $B \Rightarrow$ Nicht A “ beweisen.
- b) Geht man wie in a) beschrieben vor, so spricht man von einem indirekten Beweis.
- c) Der Wert einer endlichen Doppelsumme ist abhängig von der Reihenfolge der Summation.
- d) Wenn a eine Konstante ist, so gilt $\sum_{i=1}^4 a = 4a$.
- e) Wenn $n(A)$ die Anzahl der Elemente in der Menge A bezeichnet, so gilt stets $n(A \cap B) < n(A)$.

15. Berechnen Sie und vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich.

- a) $\sum_{k=10}^{20} (2k + 3)$
- b) $\sum_{k=0}^5 \binom{5}{k}$
- c) $\sum_{j=0}^1 \sum_{i=10}^{13} \frac{i}{j+1}$
- d) $\sum_{i=0}^3 \frac{i}{(i+1)(i+2)}$
- e) $\sum_{k=-2}^3 (k + 3)^k$

16. Alle Mengen in dieser Aufgabe sind Teilmengen einer endlichen Menge Ω . Mit $n(A)$ werde die Anzahl der Elemente in der Menge A bezeichnet.

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR.

- a) $n(A \cap B) < n(A)$.
- b) $n(A \cup B) = n(B)$, $A \subseteq B$.
- c) $n(A \cap B) = n(A)$, $A \subseteq B$.
- d) $n(A \setminus B) = n(A) - n(B)$.
- e) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

17. Unter 90 Personen waren

- 60 Personen, die gern Kaffee trinken,
- 50 Personen, die gern Tee trinken,
- 40 Personen, die gern Milch trinken.

Diese Zahlen schließen

- 35 Personen ein, die gern Kaffee und Tee trinken,
- 25 Personen, die gern Kaffee und Milch trinken,
- 20 Personen, die gern Tee und Milch trinken,

Diese Zahlen wiederum schließen 15 Personen ein, die gern Kaffee, Tee und Milch trinken.

Wie viele Personen trinken keins der drei Getränke gern?

18. Schreiben Sie die folgenden Summen in Summennotation.

a) $1 + 3 + 5 + \dots + 199$

b) $1 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^6}{7} + \frac{x^9}{10} + \dots + \frac{x^{30}}{31}$

19. Berechnen Sie $\sum_{i=3}^4 \sum_{j=5}^6 (i - j)$.

20. DREI der folgenden Aussagen sind ALLGEMEIN GÜLTIG. Alle auftretenden Summen seien wohl definiert.

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k.$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^6 \frac{a_k}{k} = \frac{1}{k} \sum_{k=1}^6 a_k.$$

$$\text{c) } \sum_{k=m}^n \left(\frac{a_k}{b_k} \right) = \frac{\sum_{i=m}^n a_i}{\sum_{j=m}^n b_j}.$$

$$\text{d) } \sum_{i=1}^{n+1} x_i = x_1 + x_{n+1} + \sum_{i=2}^n x_i.$$

$$\text{e) } \sum_{i=0}^{10} a_{i+1} = \sum_{i=1}^{11} a_i.$$

LÖSUNGEN

1. a) xy^2

b) $5a - 7b$

2. 20%

3. 4,14%

4. 2,898%

5. Mindestens 7,5 Stunden und höchstens 10 Stunden.

6. a) $-(1 + x^3)$

b) x^{-12}

c) 2

d) 4

7. 8.000

8. a) $K = \frac{(B + \alpha L)^2}{LM}$

b) $L = \left(Y_0 A^{-1} K^{-1/5} \right)^{5/3}$

c) $x = \frac{yz}{z - y}$

d) $Y = 3.000$

9. $(x - 3)(x + 5)$

10. $x_1 = 3, x_2 = -5$

11. a) $x = 2$ oder $x = -2$

b) $y = 0, 1$ oder 3

c) Es gibt keine Lösung.

12. $a = 5, b = -1, c = -2$

13. a, c, d

14. a, b, d

15. a) 363

b) 32

c) 69

d) $\frac{29}{60}$

e) 247,5

16. b,c,e

17. 5

18. a) $\sum_{i=1}^{100} (2i - 1)$

b) $\sum_{i=0}^{10} \frac{x^{3i}}{3i + 1}$

19. -8

20. a,d,e