Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Michael Paetz, Raum: 2083, Email: michael.paetz@wiso.uni-hamburg.de

Vorkurs Mathematik (WS 2016/17)

Aufgabenblatt 8

(Großübung)

LÖSUNGSKIZZE AUFGABE 4

a) Zeigen Sie, dass $\binom{5}{3} = \frac{5!}{2!3!}$, und dass allgemein

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!k!}. \tag{1}$$

Lösung

$$\begin{aligned}
\binom{5}{3} &= \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} \\
&= \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \\
&= \frac{\overbrace{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}^{5!}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot 3}_{3!}\cdot\underbrace{1\cdot 2}_{2!}} \\
&= \frac{5!}{2!3!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\binom{m}{k} &= \frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)}{k!} \\
&= \frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)\cdot(m-k)!}{k!\,(m-k)!} \\
&= \frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-k+1)\cdot\overbrace{(m-k)\cdot(m-k-1)\cdot(m-k-2)\cdot\ldots\cdot 1}^{(m-k)!}}{k!\,(m-k)!} \\
&= \frac{m!}{(m-k)!k!}
\end{aligned}$$

b) Überprüfen Sie durch direkte Berechnung, dass

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{8-3}$$

und

$$\binom{8+1}{3+1} = \binom{8}{3} + \binom{8}{3+1}$$

Lösung

$$\binom{8}{3} = 56$$

$$\binom{8}{8-3} = \binom{8}{5} = 56$$

$$\binom{8+1}{3+1} = \binom{9}{4} = 126$$

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{3+1} = \binom{8}{3} + \binom{8}{4} = 56 + 70 = 126$$

c) Verwenden Sie (1), um folgende Aussagen zu beweisen:

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$

und

$$\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1}$$

Lösung

$$\begin{aligned}
\binom{m}{k} &= \frac{m!}{(m-k)!k!} \\
&= \frac{m!}{(m-k)!\,\underbrace{(m-(m-k))!}_{k}} \\
&= \frac{m!}{(m-(m-k))!\,(m-k)!} \\
&= \binom{m}{m-k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} &= \frac{m!}{(m-k)!k!} + \frac{m!}{(m-(k+1))!\,(k+1)!} \\
&= \frac{m!}{(m-k)!k!} + \frac{m!}{(m-k-1)!\,(k+1)!} \\
&= \frac{m!\,(k+1)}{(m-k)!\,\underbrace{k!\,(k+1)}_{(k+1)!}} + \frac{m!\,(m-k)}{\underbrace{(m-k-1)!\,(m-k)}_{(m-k)!}\,(k+1)!} \\
&= \frac{m!\,(k+1)}{(m-k)!\,(k+1)!} + \frac{m!\,(m-k)}{(m-k)!\,(k+1)!} \\
&= \frac{m!\,(k+1) + m!\,(m-k)}{(m-k)!\,(k+1)!} \\
&= \frac{m!\,[(k+1) + (m-k)]}{(m-k)!\,(k+1)!} \\
&= \frac{m!\,(k+1+m-k)}{(m-k)!\,(k+1)!} \\
&= \frac{m!\,(m+1)}{(m-k)!\,(k+1)!} \\
&= \frac{(m+1)!}{(m-k)!\,(k+1)!} \\
&= \frac{(m+1)!}{((m+1)-(k+1))!\,(k+1)!} \\
&= \binom{m+1}{k+1}
\end{aligned}
$$