Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Dr. Michael Paetz, Raum: 2083, Email: michael.paetz@wiso.uni-hamburg.de

Vorkurs Mathematik (WS 2016/17)

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 1

Alle Mengen in dieser Aufgabe sind Teilmengen einer endlichen Menge Ω. Mit $n(A)$ werde die Anzahl der Elemente in der Menge A bezeichnet.
DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie an.

a) $n(A \cap B) < n(A)$ ( )

b) $n(A \cup B) = n(B)$, $A \subseteq B$ ( )

c) $n(A \cap B) = n(A)$, $A \subseteq B$ ( )

d) $n(A \setminus B) = n(A) - n(B)$ ( )

e) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ( )

Aufgabe 2

Unter 90 Personen waren

- 60 Personen, die gern Kaffee trinken,
- 50 Personen, die gern Tee trinken,
- 40 Personen, die gern Milch trinken.

Diese Zahlen schließen

- 35 Personen ein, die gern Kaffee und Tee trinken,
- 25 Personen, die gern Kaffee und Milch trinken,
- 20 Personen, die gern Tee und Milch trinken,

Diese Zahlen wiederum schließen 15 Personen ein, die gern Kaffee, Tee und Milch trinken.
Wie viele Personen trinken keins der drei Getränke gern?

Aufgabe 3

Gegeben seien die Mengen

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}\,, B = \{2, 3, 4, 5, 6\}\,, C = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$$

Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

a) $A \cap (B \cap C)$

b) $A \setminus (B \cup C)$

Aufgabe 4

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie an.

a) Ist die obere Grenze einer Summe kleiner als die untere, gibt es keine Terme. Daher ist es allgemeine Konvention diese Summe als Null zu betrachten. ( )

b) Bei einem konstanten Faktor c hinter dem Summenzeichen kann die Eigenschaft der Homogenität der Summe ausgenutzt werden, d.h. c kann vor das Summenzeichen gezogen werden. ( )

c) Für Doppelsummen gilt: $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}$ ( )

d) Nehmen Sie an, P und Q seien zwei Aussagen, so dass gilt: Wenn P wahr ist, so ist auch Q wahr. In diesem Fall spricht man von einer logischen Äquivalenz. ( )

e) $P \Rightarrow Q$ ist äquivalent zu *Nicht* $P \Rightarrow$ *Nicht* Q. ( )

Aufgabe 5

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie an.

a) Mathematische Induktion bedeutet dasselbe wie logische Äquivalenz. ( )

b) Wenn $n(A)$ die Anzahl der Elemente in einer endlichen Menge ist, so gilt für zwei endliche Mengen A und B: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. ( )

c) Mit den gleichen Bezeichnungen wie in b) gilt: $n(A \setminus B) \leq n(A)$. ( )

d) Für $P \Rightarrow Q$ sagt man: P ist eine notwendige Bedingung für Q. ( )

e) Gilt $P \Rightarrow Q$ und $Q \Rightarrow P$, so sagt man: P und Q sind logisch äquivalent. ( )

Aufgabe 6

Folgende Aussage soll mit Hilfe der mathematischen Induktion für $A(n)$ bewiesen werden:

$$A(n) : 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3} n (n+1)(n+2)$$

a) Geben Sie die Gleichung für den Induktionsanfang an und zeigen Sie, dass beide Seiten der Gleichung dasselbe Ergebnis liefern.

b) Stellen Sie die Induktionshypothese auf.

c) Geben Sie den Ausdruck an, der auf beiden Seiten addiert werden muss, um den 2. Induktionsschritt durchzuführen.

d) Führen Sie nun die vollständige Induktion durch.

Aufgabe 7

Die folgenden Summen seien gegeben:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 54, \sum_{i=1}^{n} y_i = 144, \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 924$$

Bestimmen Sie die folgende Summe:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{3} \cdot \frac{y_i}{4} \right)$$

Aufgabe 8

Die Mengen A und B seien Teilmengen der Grundmenge Ω. Mit $n(A), n(B), \ldots$ sei die Anzahl der Elemente in A, in $B, \ldots$ bezeichnet. Es gelte

$$n(\Omega) = 200, n(A) = 50, n(B) = 70, n(A \cap B) = 30$$

Bestimmen Sie $n(\Omega \setminus (A \cup B))$.

Aufgabe 9

DREI der folgenden Aussagen sind WAHR. Kreuzen Sie an.

a) $x^2 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ ( )

b) $x = 0$ und $y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0$ ( )

c) $x = 0$ und $y = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot y^2 = 0$ ( )

d) $3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = 2$ ( )

e) Aus $x^2 = 16$ folgt nicht $x = 4$. ( )

Aufgabe 10

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

a) $x + 2 = \sqrt{4x + 13}$

b) $|x + 2| = \sqrt{4 - x}$

c) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$